5/12/2017

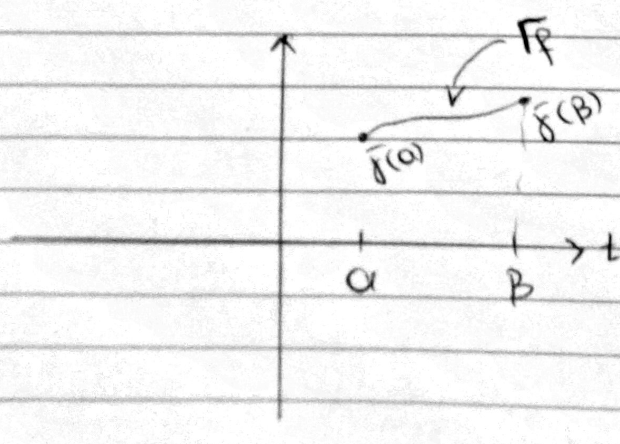
Καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Μια συνεχής $\bar{\gamma} : [a,\beta] \to \mathbb{R}^n$ λέγεται παραμετρική καμπύλη (ή τροχιά (trajectory) ή όδος (δρόμος) (path)) και η εικόνα της $\bar{\gamma}([a,\beta]) \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ (curve ή ίχνος παραμετρικής καμπύλης (trace) ή τόξο (arc)). Επίσης, λέμε ότι η $\bar{\gamma}$ δίνει μια παραμετρικοποίηση της $\bar{\gamma}([a,\beta]) = C \subset \mathbb{R}^n$.

Παραδείγματα: (α) Έστω $f : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής.
Τότε το γράφημα της f, $\Gamma_f = \{\underbrace{(t, f(t))}_{=\bar{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^2} : t \in [a,\beta]\} \subset \mathbb{R}^n$

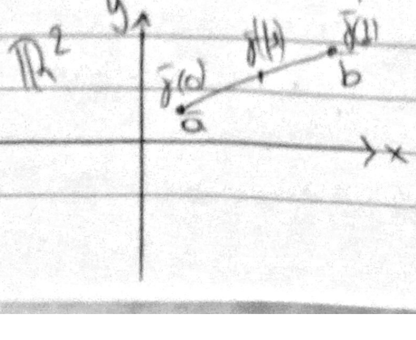
είναι μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ με παραμετρικοποίηση
$\bar{\gamma} : [a,\beta] \to \mathbb{R}^2$, $\bar{\gamma}(t) = (t, f(t))$

(η οποία είναι συνεχής, αφού το $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = f(t)$ είναι συνεχής)



(β) $\bar{\gamma}(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a})$, $t \in [0,1]$, $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$

Ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^n$

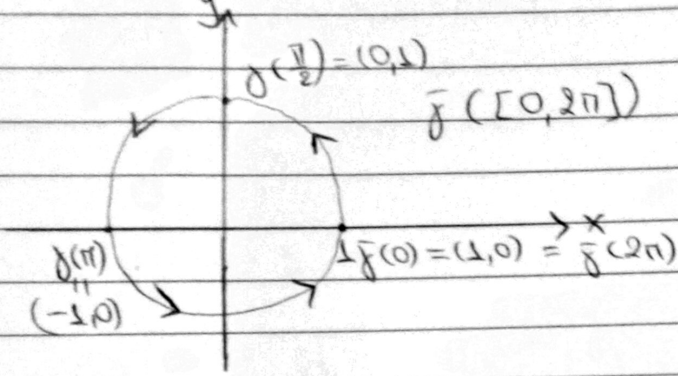


Παρατήρηση

Στο (β) βλέπουμε ότι για $t=0$ («αρχικός χρόνος») «είμαστε» στο σημείο $\bar{a}$

Ενώ για $t=1$ («τελικός χρόνος») είμαστε στο $\bar{b}$.

(γ) $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$



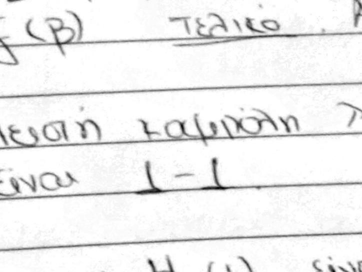
Ορισμός: • Μια παραμετρική καμπύλη $\bar{\gamma}: I \longrightarrow \mathbb{R}$ όπου $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα ονομάζεται απλή αν είναι 1-1 (δηλ. περνάμε από κάθε σημείο $\bar{\gamma}(I)$ μόνο μία φορά)

- Αν $I = [\alpha, \beta]$, τότε το $\bar{\gamma}(\alpha)$ ονομάζεται αρχικό σημείο και το $\bar{\gamma}(\beta)$ τελικό. Αν $\bar{\gamma}(\alpha) = \bar{\gamma}(\beta)$ η καμπύλη λέγεται κλειστή.
- Μια κλειστή καμπύλη λέγεται απλή (δηλ. απλή κλειστή) αν $\bar{\gamma}|[\alpha, \beta)$ είναι 1-1.

Παράδειγμα: Η (γ) είναι απλή κλειστή, ενώ αν παραμετρικοποιήσουμε τον μοναδιαίο κύκλο με $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in \mathbb{R}$ ή $t \in [0, 4\pi]$ δεν έχουμε απλή καμπύλη.

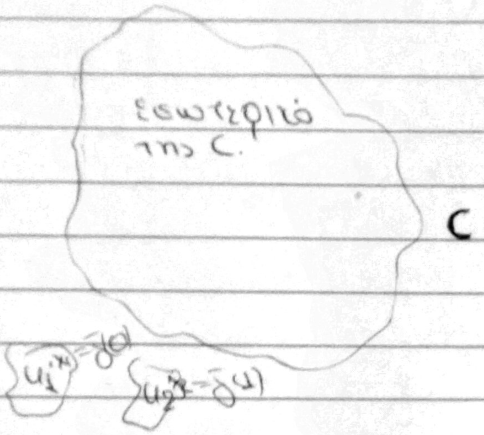
- Αν $\bar{b} \neq \bar{a}$, τότε η $\bar{\gamma}(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a})$, $t \in [0,1]$ είναι απλή ($\bar{\gamma}(t_1) = \bar{\gamma}(t_2) \Longleftrightarrow (t_1 - t_2)\underbrace{(\bar{b} - \bar{a})}_{\neq 0} = \bar{0} \Longleftrightarrow |t_1 - t_2| \cdot \underbrace{\|\bar{b} - \bar{a}\|}_{>0} = 0 \Longrightarrow t_1 = t_2$)

- Επίσης, η $\bar{\gamma}(t) = (t, f(t))$

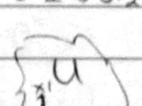


$f(t) = c$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$
είναι απλή ($\forall$)
αφού $\bar{\gamma}(t_1) = \bar{\gamma}(t_2)$
$(t_1, f(t_1))\ (t_2, f(t_2)) \Longleftrightarrow t_1 = t_2$
και $f(t_1) = f(t_2) \Longrightarrow t_1 = t_2$

[Εγκυκλοπαιδικά: Θεώρημα καμπύλης του Jordan:
κάθε απλή κλειστή καμπύλη $C \subset \mathbb{R}^2$ διαχωρίζει το $\mathbb{R}^2 \setminus C$ σε δύο ανοικτά και συνεκτικά υποσύνολα, των οποίων αποτελεί σύνορο, και το ένα είναι φραγμένο και ονομάζεται εσωτερικό της καμπύλης C



$U = U_1 \cup U_2$ όχι συνεκτικό

ενώ 

U συνεκτικό [U (οδικά) συνεκτικό $\forall\ \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in U$

$\exists$ καμπύλη (οδός) $\bar{\gamma}$ και $\bar{\gamma}[0,1] \subset U$
$\bar{\gamma}(1) = \bar{x}_2$ με $\bar{\gamma}(0) = \bar{x}_1$

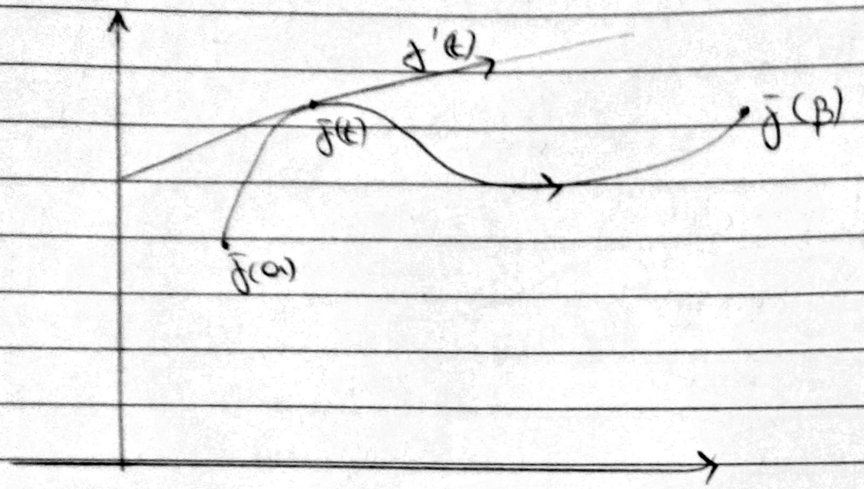
(Απόδειξη βλ. αλγεβρική τοπολογία)

Παρατήρηση (!!!) Όταν λέμε για κάποια καμπύλη $C \subseteq \mathbb{R}^n$ (δηλ. όταν μας δίνεται η καμπύλη ως υποσύνολο) ότι έχει την τάδε ιδιότητα (π.χ. συνεχής, απλή), τότε συνήθως εννοούμε ότι $\exists\ \bar{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$ με $\bar{\gamma}(I) = C$, έτσι ώστε η $\bar{\gamma}$ να έχει την ιδιότητα αυτή.

Ορισμός Μια $\bar{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$ λέγεται διαφορίσιμη, αν $\forall\ t \in I$

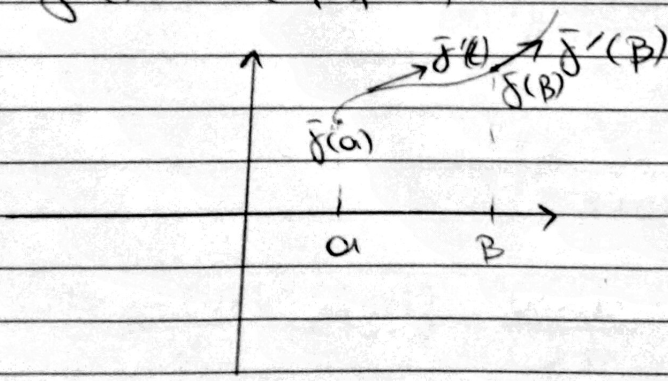
$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}$ $\quad \exists\ \bar{\gamma}'(t) = D\bar{\gamma}(t) = J_{\bar{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \gamma_2'(t)\\ \vdots\\ \gamma_n'(t)\end{pmatrix}$

$t \longmapsto \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \vdots\\ \gamma_n(t)\end{pmatrix} = \bar{\gamma}(t)$



<u>Παράδειγμα</u> Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη τότε

η $\bar{\gamma}(t)=(t,f(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$ (και $\bar{\gamma}([\alpha,\beta])=\Gamma_f$)
είναι διαφορίσιμη με παράγωγο ή εφαπτόμενο διάνυσμα
$\bar{\gamma}'(t)=(1,f'(t))$



- Το $\bar{\gamma}'(t)\in\mathbb{R}^n$, λέγεται <u>παράγωγος</u> ή <u>εφαπτόμενο διάνυσμα</u> ή διάνυσμα ταχύτητας.
- Αν η $\bar{\gamma}': I\to\mathbb{R}^n$ είναι συνεχής ($\Rightarrow$ η $\bar{\gamma}'$ είναι καμπύλη) τότε η $\bar{\gamma}$ λέγεται <u>συνεχώς</u> <u>διαφορίσιμη</u> ή C^1 - καμπύλη.
- Αν η $\bar{\gamma}$ είναι C^1 - καμπύλη με $\bar{\gamma}'(t)\neq 0\ \forall t\in I$, τότε λέγεται <u>κανονική</u> (regular)

<u>Παρατήρηση 1</u> (SOS για κατανόηση)

•<u>Γεωμετρικά</u>: Το εφαπτόμενο διάνυσμα

στο σημείο $\bar{\gamma}(t)$ μιας κανονικής <u>καμπύλης</u> δίνει την

την κατεύθυνση της εφαπτομένης

$$\left\{ \bar{\gamma}(t) + s\,\frac{\bar{\gamma}'(t)}{\|\bar{\gamma}'(t)\|} : s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\bar{\gamma}'(t) = D\bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\bar{\gamma}(t+h) - \bar{\gamma}(t)}{h} \neq \bar{0}$$

$$\left\{ \bar{\gamma}(t) + s\left(\frac{\bar{\gamma}(t+h) - \bar{\gamma}(t)}{\|\bar{\gamma}(t+h) - \bar{\gamma}(t)\|} \cdot \frac{|h|}{h} \right)_{\Rightarrow \|\cdot\| = 1} : s \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < |h| < 1$$

$$\left\| \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|} \right\| = 1, \quad \bar{a} \neq \bar{0}$$

- « Φυσικά » (από την σκοπιά της Φυσικής)

Το εφαπτόμενο διάνυσμα $\bar{\gamma}'(t)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως <u>διάνυσμα ταχύτητας</u> (με ταχύτητα $\|\bar{\gamma}'(t)\|$) στο σημείο $\bar{\gamma}(t)$, αφού $\frac{\|\bar{\gamma}(t+h) - \bar{\gamma}(t)\|}{h} =$

$\frac{\text{απόσταση μεταξύ } \bar{\gamma}(t+h) \text{ και } \bar{\gamma}(t)}{\text{χρόνος } h \text{ που χρειάστηκε}}$

«στιγμιαία ταχύτητα» $\bar{\gamma}'(t) = \frac{d\bar{\gamma}(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{\gamma}(t+h) - \bar{\gamma}(t)}{h}$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\bar{\gamma}_i : I_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, δύο κανονικές καμπ. με σημείο τομής $\bar{\gamma}_1(t_1) = \bar{\gamma}_2(t_2)$. Η γωνία $\theta \in [0, \pi]$ μεταξύ των $\bar{\gamma}_1'(t_1)$ και $\bar{\gamma}_2'(t_2)$ με $\cos\theta = \frac{\bar{\gamma}_1'(t_1) \cdot \bar{\gamma}_2'(t_2)}{\underbrace{\|\bar{\gamma}_1'(t_1)\|}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\|\bar{\gamma}_2'(t_2)\|}_{\neq 0}}$

<u>Παράδειγμα</u>: $\bar{\gamma}(t) = (\cos(at), \sin(at))$, $a \neq 0$

$t \in [0, \frac{a\pi}{a}]$ $(a > 0)$ $\quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{|a|}\right]$

$[\, a = 0 : \bar{\gamma}(t) = (1, 0) \,]$

$\bar{\gamma}_a'(t) = a(-\sin(at), \cos(at)) \Longrightarrow \|\bar{\gamma}_a'(t)\| = |a| \longleftarrow$

ταχύτητα με την οποία διατρέχουμε

τον κύκλο $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} = \gamma(t)$

Επίσης, για $a=1$ $\gamma'(0) = (0,1)$ για $a=-1$

$\gamma'(0) = -(0,1)$

$\Longrightarrow$ Το $\gamma'(t)$ δίνει και τον προσανατολισμό.